桁梁の撓み理論に関する基礎的研究(2)

その他（別言語等）のタイトル	Fundamental Studies on the Deflection Theory of Beam (2)
著者	中村　作太郎
雑誌名	室蘭工業大学研究報告
巻	2
号	2
ページ	519-546
発行年	1957-12-25
URL	http://hdl.handle.net/10258/3087

桁梁の撓み理論に関する基礎的研究 (II)

中 村 作 太 郎

Foundamental Studies on the Deflection Theory of Beam (II)

Sakutaro Nakamura

Abstract

The author assumed an acting line of axial force on any height of beam and set strictly changeable state of deflection curve and change of span length, taking in consideration the influence of height and miscrospic displacements of beam. He put the above assumption and influence in generally foundamental differential equation of beam, and induced and solved this equation by the exact theory of transcendental function about a beam having unit concentrated load on any point.

He calculated strictly and widely axial forces, deflection angles, deflections of beam about five different acting lines of axial force by the above exact theory in the three case of steel beam, white oak beam and bamboo beam (span length $l=40$ cm; width $b=1.6$ cm, 1.576 cm, 1.340 cm each; height $h=0.450$ cm, 0.439 cm, 0.438 cm each) as Foundamental Studies on the Deflection Theory of Beam (I).

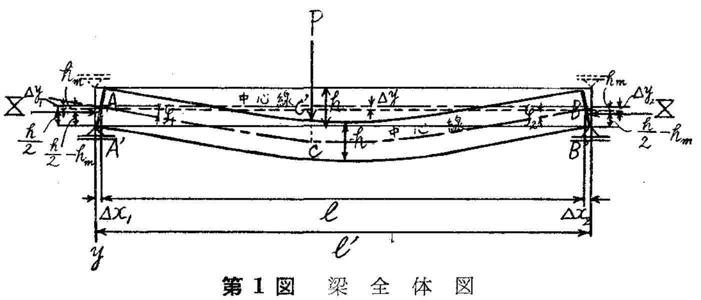
By these calculating results, he reached a conclusion that the sign and strength of axial force change with a certain law by altering vertical height of its acting line.

I. 緒　　論

両端が単純支持あるいは鉸の状態で支えられている桁や梁の撓み理論には種々あるが，厳密な物理実験の結果とそれらの計算値との間には，撓み理論を吟味する上において無視出来ない程の差異 (平均約10～20% 実験値の方が大きい) がある事は，桁梁の撓み理論に関する基礎的研究(I)において既に述べたところである。その結果，最も大きな影響を与えると考えられるのは，(1) 軸力が梁の中心線より上・下幾らの高さに作用するかという事である。すなわち，その作用線の位置によつて，軸力は正になる事もあれば負になる事も考えられる。また，この軸力の大きさと正負の記号こそは撓みに対し，頗る大きな影響を与えるのである。(2) 桁梁の高さの影響も撓みに対し無視出来ないものがある。(3) 撓曲線の位置の変化と支間の水平微少変位の撓みに対する影響も省略出来ないものがある。すなわち，上記三つの影響を基本微分方程

式の中に同時に導入し，超越函数により表示せられる厳密理論[1]の拡張によつてこれを解いた。軸力を生ずる桁梁の厳密理論において軸圧力を取扱つた論文は著者の知る処では全く見当らないが，上記の三つの影響を考慮に入れて一般微分方程式を解く場合，厳密に云えば，未知量 X は数学的にはもちろん，正・負いずれにもなり得るものである事が，ここ数年に渡る計算結果によつて証明されたし，また，梁の厳密理論としても，軸力の作用位置によつて，X が，軸張力，軸圧力，いずれにもなり得ると考えられ，梁に，負の軸力すなわち，軸圧力が生ずる場合は，撓みは，当然増大の傾向を示すものである。軸力 X は，計算の結果，複素数 $X=+a(1\pm ri)$ または，$X=-a(1\mp ri)$ の形で求められたが，$ri=0$ の場合は，実数のみとなる。計算の結果，軸力 X は，梁の中心線より上方並びに中心線より更に幾分下方の点までに作用するときは軸張力，その点より下方底面までの間に作用するときは，軸圧力となり，計算する前に考えていたのとほぼ一致せる傾向を示した。又，撓角 φ_1，φ_2 は，著者の理論によれば，従来の厳密理論に比べ，荷重の位置が支点に近付くに従い，φ_1 と φ_2 の差が大きくなつて行く事が分つた。以下，基本微分方程式を立て，その解析と誘導，広範囲に渡る計算結果など順を追つて述べる事とする。

II. 基本微分方程式

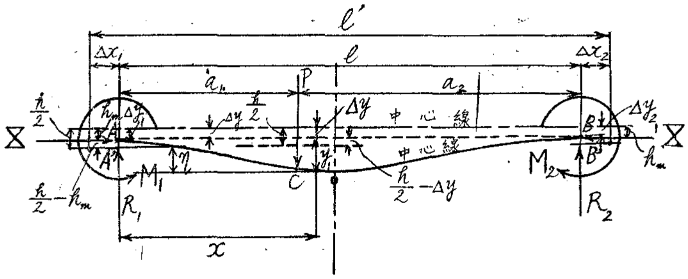


第1図 梁全体図

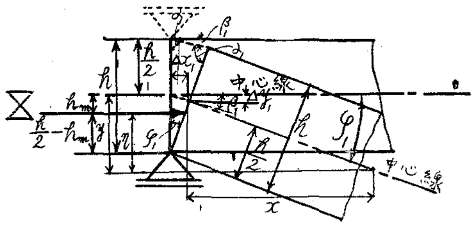
第1図，第3図を参照して

$$\left.\begin{aligned}&\Delta x_1=\frac{h}{2}\sin\varphi_1, &&\Delta x_2=\frac{h}{2}\sin\varphi_2, &&\Delta y_1=\frac{h}{2}(1-\cos\varphi_1),\\&\Delta y_2=\frac{h}{2}(1-\cos\varphi_2), &&\alpha_1=\frac{\pi-\varphi_1}{2}, &&\beta_1=\frac{\varphi_1}{2}\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

1) 鷹部屋福平：高級桁梁論. 1929.
Fukuhei Takabeya: Étude de la Force Longitudinale et du Moment de Flexion aux Extrémités de la Piéce Complétement Encastrée. 北海道帝国大学工学部紀要，第1巻第1号，1926.
Fukuhei Takabeya: Études sur la force longitudinale de la piéce encastrée, les murs étant complétement dociles aux déplacements angulaires. 北海道帝国大学工学部紀要，第1巻 第2号，1926.



第 2 図　梁変位詳細図



第 3 図　支点附近詳細図

第1図，第2図，第3図において

$$\left.\begin{aligned}
l' &= l+(\varDelta x_1+\varDelta x_2)\\
l &= l'-\frac{h}{2}(\sin\varphi_1+\sin\varphi_2)\\
\varDelta y &= \frac{h}{2}\left\{1-\cos\varphi_1\left(1-\frac{x}{l}\right)-\cos\varphi_2\left(\frac{x}{l}\right)\right\}\\
y &= y_1+\varDelta y\\
\eta &= y\mp h_m=y_1+\varDelta y\mp h_m
\end{aligned}\right\}\qquad(2)$$

桁梁の基本微分方程式は次の如くである。

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{M}{KI}\\
&\text{ここに}\\
&K=E+\frac{X}{A}=E\left(1+\frac{X}{EA}\right)
\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

今，支間 l，弾性係数 E，桁梁の幅 b，桁梁の高さ h，断面積 A，慣性モーメント I は一定の桁梁 AB の支点より距離 a_1 に集中荷重 P が載るものとする。

$0\leqq x\leqq a_1$ においては，

$$\begin{aligned}
M &= R_1x-M_1-X(y_1+\varDelta y\mp h_m)\\
&= R_1x-M_1-X\left\{y_1+\frac{h}{2}(1-\cos\varphi_2)+\frac{h}{2}(\cos\varphi_2-\cos\varphi_1)\frac{l-x}{l}\mp h_m\right\}
\end{aligned}\qquad(4)$$

(3)式に相当する式を作ると

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}-\frac{X}{KI}y_1+\frac{1}{KI}\left\{R_1x-M_1-X(\varDelta y\mp h_m)\right\}=0$$

$$\therefore\quad \frac{d^2y_1}{dx^2}-\frac{X}{KI}y_1+\frac{1}{KI}\left[R_1x-M_1-X\left\{\frac{h}{2}(1-\cos\varphi_2)+\frac{h}{2}(\cos\varphi_2-\cos\varphi_1)\frac{l-x}{l}\mp h_m\right\}\right]=0 \tag{5}$$

$a_1\leqq x\leqq l$ においては

$$M=R_2(l-x)-M_2-X(y_1+\varDelta y\mp h_m)=R_2(l-x)-M_2-X\left\{y_1+\frac{h}{2}(1-\cos\varphi_2)+\frac{h}{2}(\cos\varphi_2-\cos\varphi_1)\frac{l-x}{l}\mp h_m\right\} \tag{6}$$

(3)式に相当する式を作ると

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}-\frac{X}{KI}y_1+\frac{1}{KI}\left\{R_2(l-x)-M_2-X(\varDelta y\mp h_m)\right\}=0$$

$$\therefore\quad \frac{d^2y_1}{dx^2}-\frac{X}{KI}y_1+\frac{1}{KI}\left[R_2(l-x)-M_2-X\left\{\frac{h}{2}(1-\cos\varphi_2)+\frac{h}{2}(\cos\varphi_2-\cos\varphi_1)\frac{l-x}{l}\mp h_m\right\}\right]=0 \tag{7}$$

III. 基本微分方程式の解

弯曲が微量であるとし，X は x に関係なく一定であると仮定すると K は x に無関係となる。そこで，微分方程式(5), (7)式を解けば

$0\leqq x\leqq a_1$ においては

$$y_1=A_1e^{\xi x}+A_2e^{-\xi x}+\frac{R_1}{X}x-\frac{M_1}{X}-\left\{\frac{h}{2}(1-\cos\varphi_2)+\frac{h}{2}(\cos\varphi_2-\cos\varphi_1)\frac{l-x}{l}\mp h_m\right\}$$

$$=A_1e^{\xi x}+A_2e^{-\xi x}+\frac{R_1}{X}x-\frac{M_1}{X}+\frac{h}{2}\left\{\cos\varphi_1\left(1-\frac{x}{l}\right)+\cos\varphi_2\left(\frac{x}{l}\right)-1\right\}\pm h_m \tag{8}$$

$a_1\leqq x\leqq l$ においては

$$y_1=B_1e^{\xi x}+B_2e^{-\xi x}+\frac{R_2(l-x)}{X}-\frac{M_2}{X}-\left\{\frac{h}{2}(1-\cos\varphi_2)+\frac{h}{2}(\cos\varphi_2-\cos\varphi_1)\frac{l-x}{l}\mp h_m\right\}=B_1e^{\xi x}+B_2e^{-\xi x}+\frac{R_2(l-x)}{X}-\frac{M_2}{X}+\frac{h}{2}\left\{\cos\varphi_1\left(1-\frac{x}{l}\right)+\cos\varphi_2\left(\frac{x}{l}\right)-1\right\}\pm h_m \tag{9}$$

ここに

$$\xi=\sqrt{\frac{X}{\mu KI}} \quad \text{或いは} \quad X=\mu\xi^2 KI \tag{10}$$

μ: 支点に水平微少変位を生ずるときの梁の材料によつて一定せる軸力に関する係数，とする。

$$\left.\begin{array}{lll} A\text{端では} & x=0,\ y_1=0\,; & x=0,\ \dfrac{dy_1}{dx}=\varphi_1 \\ B\text{端では} & x=l,\ y_1=0\,; & x=l,\ \dfrac{dy_1}{dx}=-\varphi_2 \end{array}\right\} \tag{11}$$

これらの境界条件より，A_1，A_2，B_1，B_2 を求める。

$$A_1+A_2-\frac{M_1}{X}+\frac{h}{2}(\cos\varphi_1-1)\pm h_m=0 \tag{12}$$

$$\left[A_1\xi e^{\xi x}-A_2\xi e^{-\xi x}+\frac{R_1}{X}+\frac{h}{2}\left\{-\frac{1}{l}\cos\varphi_1+\frac{1}{l}\cos\varphi_2\right\}\right]_{x=0}=\varphi_1$$

$$A_1\xi-A_2\xi+\frac{R_1}{X}-\frac{h}{2l}(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2)=\varphi_1 \tag{13}$$

$$B_1e^{\xi l}+B_2e^{-\xi l}-\frac{M_2}{X}+\frac{h}{2}(\cos\varphi_2-1)\pm h_m=0 \tag{14}$$

$$B_1\xi e^{\xi l}-B_2\xi e^{-\xi l}-\frac{R_2}{X}-\frac{h}{2l}\cos\varphi_1+\frac{h}{2l}\cos\varphi_2=-\varphi_2 \tag{15}$$

(12) 式より

$$A_2=\frac{M_1}{X}-\frac{h}{2}(\cos\varphi_1-1)\mp h_m-A_1 \tag{16}$$

(16) 式を (13) 式に代入し

$$A_1\xi-\left\{\frac{M_1}{X}-\frac{h}{2}(\cos\varphi_1-1)-h_m-A_1\right\}\xi+\frac{R_1}{X}-\frac{h}{2l}(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2)=\varphi_1$$

$$\left\{2A_1-\frac{M_1}{X}+\frac{h}{2}(\cos\varphi_1-1)\pm h_m\right\}\xi=\varphi_1-\frac{R_1}{X}+\frac{h}{2l}(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2)$$

$$2A_1-\frac{M_1}{X}+\frac{h}{2}(\cos\varphi_1-1)\pm h_m=\frac{1}{\xi}\left\{\varphi_1-\frac{R_1}{X}+\frac{h}{2l}(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2)\right\}$$

$$\begin{aligned} A_1&=\frac{M_1}{2X}-\frac{h}{4}(\cos\varphi_1-1)\mp\frac{h_m}{2}+\frac{1}{2\xi}\left\{\varphi_1-\frac{R_1}{X}+\frac{h}{2l}(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2)\right\}\\ &=\frac{M_1}{2X}-\frac{h}{4}(\cos\varphi_1-1)\mp\frac{h_m}{2}-\frac{1}{2\xi}\left\{\frac{R_1}{X}-\frac{h}{2l}(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2)-\varphi_1\right\} \end{aligned} \tag{17}$$

(17) 式を (16) 式に代入し

$$\begin{aligned} A_2=&\frac{M_1}{X}-\frac{h}{2}(\cos\varphi_1-1)\mp h_m-\frac{M_1}{2X}+\frac{h}{4}(\cos\varphi_1-1)\\ &+\frac{h_m}{2}+\frac{1}{2\xi}\left\{\frac{R_1}{X}-\frac{h}{2l}(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2)-\varphi_1\right\} \end{aligned}$$

$$=\frac{M_1}{2X}-\frac{h}{4}(\cos\varphi_1-1)\mp\frac{h_m}{2}+\frac{1}{2\xi}\left\{\frac{R_1}{X}-\frac{h}{2l}(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2)-\varphi_1\right\} \tag{18}$$

(14) 式より

$$B_1e^{\xi l}+B_2e^{-\xi l}-\frac{M_2}{X}+\frac{h}{2}(\cos\varphi_2-1)\pm h_m=0$$

$$\therefore\quad B_2=\frac{1}{e^{-\xi l}}\left\{\frac{M_2}{X}-\frac{h}{2}(\cos\varphi_2-1)-B_1e^{\xi l}\mp h_m\right\} \tag{19}$$

(19) 式を (15) 式に代入すれば

$$B_1\xi e^{\xi l}-\xi\left\{\frac{M_2}{X}-\frac{h}{2}(\cos\varphi_2-1)-B_1e^{\xi l}\mp h_m\right\}-\frac{R_2}{X}-\frac{h}{2l}\cos\varphi_1+\frac{h}{2l}\cos\varphi_2=-\varphi_2$$

$$\therefore\quad 2B_1\xi e^{\xi l}-\frac{\xi M_2}{X}+\frac{\xi h}{2}(\cos\varphi_2-1)\pm\xi h_m-\frac{R_2}{X}-\frac{h}{2l}\cos\varphi_1+\frac{h}{2l}\cos\varphi_2=-\varphi_2$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad B_1&=\frac{1}{2\xi e^{\xi l}}\left\{\frac{\xi M_2}{X}-\frac{\xi h}{2}(\cos\varphi_2-1)\mp\xi h_m+\frac{R_2}{X}+\frac{h}{2l}\cos\varphi_1-\frac{h}{2l}\cos\varphi_2\right.\\&\left.\quad-\varphi_2\right\}=\frac{1}{2e^{\xi l}}\left\{\frac{M_2}{X}-\frac{h}{2}(\cos\varphi_2-1)\mp h_m\right.\\&\quad\left.+\frac{1}{\xi}\frac{R_2}{X}+\frac{h}{2\xi l}(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2)-\frac{\varphi_2}{\xi}\right\}\end{aligned} \tag{20}$$

(20) 式を (19) 式に代入すれば

$$\begin{aligned}B_2=&\frac{1}{e^{-\xi l}}\left[\frac{M_2}{X}-\frac{h}{2}(\cos\varphi_2-1)-\frac{1}{2}\left\{\frac{M_2}{X}-\frac{h}{2}(\cos\varphi_2-1)\mp h_m+\frac{1}{\xi}\frac{R_2}{X}\right.\right.\\&\left.\left.+\frac{h}{2\xi l}(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2)-\frac{\varphi_2}{\xi}\right\}\mp h_m\right]\\=&\frac{1}{2e^{-\xi l}}\left[\frac{M_2}{X}-\frac{h}{2}(\cos\varphi_2-1)\mp h_m-\frac{1}{\xi}\frac{R_2}{X}-\frac{h}{2\xi l}(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2)+\frac{\varphi_2}{\xi}\right]\end{aligned} \tag{21}$$

(17) 式より

$$A_1=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{X}\left(M_1-\frac{R_1}{\xi}\right)-\frac{h}{2}\left(1-\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_1-\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_2+\frac{\varphi_1}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\right\} \tag{22}$$

(18) 式より

$$A_2=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{X}\left(M_1+\frac{R_1}{\xi}\right)-\frac{h}{2}\left(1+\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_1+\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_2-\frac{\varphi_1}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\right\} \tag{23}$$

(20) 式より

$$\begin{aligned}B_1=&\frac{1}{2e^{\xi l}}\left\{\frac{1}{X}\left(M_2+\frac{R_2}{\xi}\right)+\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1-\frac{h}{2}\left(1+\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_2-\frac{\varphi_2}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\right\}\\=&\frac{1}{2(\cosh\xi l+\sinh\xi l)}\left\{\frac{1}{X}\left(M_2+\frac{R_2}{\xi}\right)+\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1\right.\\&\left.-\frac{h}{2}\left(1+\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_2-\frac{\varphi_2}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\right\}\end{aligned} \tag{24}$$

(21) 式より

$$B = \frac{1}{2e^{-\xi l}}\left[\frac{1}{X}\left(M_2 - \frac{R_2}{\xi}\right) - \frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1 - \frac{h}{2}\left(1 - \frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_2 + \frac{\varphi_2}{\xi} + \frac{h}{2} \mp h_m\right]$$

$$= \frac{1}{2(\cosh\xi l - \sinh\xi l)}\left\{\frac{1}{X}\left(M_2 - \frac{R_2}{\xi}\right) - \frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1 - \frac{h}{2}\left(1 - \frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_2 + \frac{\varphi_2}{\xi} + \frac{h}{2} \mp h_m\right\} \quad (25)$$

(8) 式より，$0 \leqq x \leqq a_1$ において

$$y_1 = \frac{\cosh\xi x + \sinh\xi x}{2}\left\{\frac{1}{X}\left(M_1 - \frac{R_1}{\xi}\right) - \frac{h}{2}\left(1 - \frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_1 - \frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_2 + \frac{\varphi_1}{\xi} + \frac{h}{2} \mp h_m\right\} + \frac{\cosh\xi x - \sinh\xi x}{2}\left\{\frac{1}{X}\left(M_1 + \frac{R_1}{\xi}\right) - \frac{h}{2}\left(1 + \frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_1 + \frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_2 - \frac{\varphi_1}{\xi} + \frac{h}{2} \mp h_m\right\} + \frac{R_1}{X}x - \frac{M_1}{X} + \frac{h}{2}\left\{\cos\varphi_1\left(1 - \frac{x}{l}\right) + \cos\varphi_2\left(\frac{x}{l}\right) - 1\right\} \pm h_m \quad (26)$$

(9) 式より，$a_1 \leqq x \leqq l$ において

$$y_1 = \frac{\cosh\xi x + \sinh\xi x}{2(\cosh\xi l + \sinh\xi l)}\left\{\frac{1}{X}\left(M_2 + \frac{R_2}{\xi}\right) + \frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1 - \frac{h}{2}\left(1 + \frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_2 - \frac{\varphi_2}{\xi} + \frac{h}{2} \mp h_m\right\} + \frac{\cosh\xi x - \sinh\xi x}{2(\cosh\xi l - \sinh\xi l)}\left\{\frac{1}{X}\left(M_2 - \frac{R_2}{\xi}\right) - \frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1 - \frac{h}{2}\left(1 - \frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_2 + \frac{\varphi_2}{\xi} + \frac{h}{2} \mp h_m\right\} + \frac{R_2(l-x)}{X} - \frac{M_2}{X} + \frac{h}{2}\left\{\cos\varphi_1\left(1 - \frac{x}{l}\right) + \cos\varphi_2\left(\frac{x}{l}\right) - 1\right\} \pm h_m \quad (27)$$

そこで，(26) 式より，$0 \leqq x \leqq a_1$ においては

$$y = y_1 + \Delta y = \frac{\cosh\xi x + \sinh\xi x}{2}\left\{\frac{1}{X}\left(M_1 - \frac{R_1}{\xi}\right) - \frac{h}{2}\left(1 - \frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_1 - \frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_2 + \frac{\varphi_1}{\xi} + \frac{h}{2} \mp h_m\right\} + \frac{\cosh\xi x - \sinh\xi x}{2}\left\{\frac{1}{X}\left(M_1 + \frac{R_1}{\xi}\right) - \frac{h}{2}\left(1 + \frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_1 + \frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_2 - \frac{\varphi_1}{\xi} + \frac{h}{2} \mp h_m\right\} + \frac{R_1}{X}x - \frac{M_1}{X} \pm h_m \quad (28)$$

また，(27) 式より，$a_1 \leqq x \leqq l$ においては

$$y = y_1 + \Delta y = \frac{\cosh\xi x + \sinh\xi x}{2(\cosh\xi l + \sinh\xi l)}\left\{\frac{1}{X}\left(M_2 + \frac{R_2}{\xi}\right) + \frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1 - \frac{h}{2}\left(1 + \frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_2 - \frac{\varphi_2}{\xi} + \frac{h}{2} \mp h_m\right\} + \frac{\cosh\xi x - \sinh\xi x}{2(\cosh\xi l - \sinh\xi l)}\left\{\frac{1}{X}\left(M_2 - \frac{R_2}{\xi}\right) - \frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1 - \frac{h}{2}\left(1 - \frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_2 + \frac{\varphi_2}{\xi} + \frac{h}{2} \mp h_m\right\} + \frac{R_2(l-x)}{X} - \frac{M_2}{X} \pm h_m \quad (29)$$

また，$0 \leqq x \leqq a_1$ において，(4) 式より

$$M_x = R_1x - M_1 - X\Big[\frac{\cosh\xi x+\sinh\xi x}{2}\Big\{\frac{1}{X}\Big(M_1-\frac{R_1}{\xi}\Big)-\frac{h}{2}\Big(1-\frac{1}{\xi l}\Big)\cos\varphi_1 - \frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_2+\frac{\varphi_1}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\Big\}+\frac{\cosh\xi x-\sinh\xi x}{2}\Big\{\frac{1}{X}\Big(M_1+\frac{R_1}{\xi}\Big) - \frac{h}{2}\Big(1+\frac{1}{\xi l}\Big)\cos\varphi_1+\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_2-\frac{\varphi_1}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\Big\}+\frac{R_1}{X}x-\frac{M_1}{X}\Big] \tag{30}$$

$a_1 \leqq x \leqq l$ において，(6) 式より

$$M_x = R_2(l-x)-M_2-X\Big[\frac{\cosh\xi x+\sinh\xi x}{2(\cosh\xi l+\sinh\xi l)}\Big\{\frac{1}{X}\Big(M_2+\frac{R_2}{\xi}\Big)+\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1 - \frac{h}{2}\Big(1+\frac{1}{\xi l}\Big)\cos\varphi_2-\frac{\varphi_2}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\Big\}+\frac{\cosh\xi x-\sinh\xi x}{2(\cosh\xi l-\sinh\xi l)}\Big\{\frac{1}{X}\Big(M_2-\frac{R_2}{\xi}\Big) - \frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1-\frac{h}{2}\Big(1-\frac{1}{\xi l}\Big)\cos\varphi_2+\frac{\varphi_2}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\Big\}+\frac{R_2(l-x)}{X}-\frac{M_2}{X}\Big] \tag{31}$$

また，反力とモーメントの釣合条件より

$$R_1+R_2-P=0 \tag{32}$$

$$R_1l-M_1\pm X\cdot h_m-P(l-a_1)+M_2\mp X\cdot h_m=0$$

$$\therefore\quad R_1l-M_1-P(l-a_1)+M_2=0 \tag{33}$$

更に，C 点においては，撓角並びに撓みの AC, CB 両側について求めた式が相等しいと云う条件より二式が得られる事となる。(28) 及び (29) 式を dx について微分すれば

$0 \leqq x \leqq a_1$ においては，(28) 式より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\Big\{\frac{1}{X}\Big(M_1-\frac{R_1}{\xi}\Big)-\frac{h}{2}\Big(1-\frac{1}{\xi l}\Big)\cos\varphi_1-\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_2+\frac{\varphi_1}{\xi} + \frac{h}{2}\mp h_m\Big\}\frac{d(\cosh\xi x+\sinh\xi x)}{dx}+\frac{1}{2}\Big\{\frac{1}{X}\Big(M_1+\frac{R_1}{\xi}\Big)-\frac{h}{2}\Big(1+\frac{1}{\xi l}\Big)\cos\varphi_1 + \frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_2-\frac{\varphi_1}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\Big\}\frac{d(\cosh\xi x-\sinh\xi x)}{dx}+\frac{R_1}{X}$$

$$=\frac{(\sinh\xi x+\cosh\xi x)\xi}{2}\Big\{\frac{1}{X}\Big(M_1-\frac{R_1}{\xi}\Big)-\frac{h}{2}\Big(1-\frac{1}{\xi l}\Big)\cos\varphi_1-\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_2 + \frac{\varphi_1}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\Big\}+\frac{(\sinh\xi x-\cosh\xi x)}{2}\xi\Big\{\frac{1}{X}\Big(M_1+\frac{R_1}{\xi}\Big)-\frac{h}{2}\Big(1+\frac{1}{\xi l}\Big)\cos\varphi_1 + \frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_2-\frac{\varphi_1}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\Big\}+\frac{R_1}{X} \tag{34}$$

また，$a_1 \leqq x \leqq l$ においては，(29) 式より

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2(\cosh\xi l+\sinh\xi l)}\Big\{\frac{1}{X}\Big(M_2+\frac{R_2}{\xi}\Big)+\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1-\frac{h}{2}\Big(1+\frac{1}{\xi l}\Big)\cos\varphi_2 - \frac{\varphi_2}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\Big\}\frac{d(\cosh\xi x+\sinh\xi x)}{dx}+\frac{1}{2(\cosh\xi l-\sinh\xi l)}\Big\{\frac{1}{X}\Big(M_2-\frac{R_2}{\xi}\Big) - \frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1-\frac{h}{2}\Big(1-\frac{1}{\xi l}\Big)\cos\varphi_2+\frac{\varphi_2}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\Big\}\frac{d(\cosh\xi x-\sinh\xi x)}{dx}-\frac{R_2}{X}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\xi(\sinh\xi x+\cosh\xi x)}{2(\cosh\xi l+\sinh\xi l)}\left\{\frac{1}{X}\left(M_2+\frac{R_2}{\xi}\right)+\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1-\frac{h}{2}\left(1+\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_2-\frac{\varphi_2}{\xi}\right.$$
$$\left.+\frac{h}{2}\mp h_m\right\}+\frac{\xi(\sinh\xi x-\cosh\xi x)}{2(\cosh\xi l-\sinh\xi l)}\left\{\frac{1}{X}\left(M_2-\frac{R_2}{\xi}\right)-\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1\right.$$
$$\left.-\frac{h}{2}\left(1-\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_2+\frac{\varphi_2}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\right\}-\frac{R_2}{X} \tag{35}$$

荷重点 C においては，$x=a_1$ なる故，(34) 式において

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a_1}=\frac{(\sinh\xi a_1+\cosh\xi a_1)}{2}\xi\left\{\frac{1}{X}\left(M_2-\frac{R_1}{\xi}\right)-\frac{h}{2}\left(1-\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_1\right.$$
$$\left.-\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_2+\frac{\varphi_1}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\right\}+\frac{(\sinh\xi a_1-\cosh\xi a_1)}{2}\xi\left\{\frac{1}{X}\left(M_1+\frac{R_1}{\xi}\right)\right.$$
$$\left.-\frac{h}{2}\left(1+\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_1+\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_2-\frac{\varphi_1}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\right\}+\frac{R_1}{X} \tag{36}$$

(35) 式において

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=a_1}=\frac{\xi(\sinh\xi a_1+\cosh\xi a_1)}{2(\cosh\xi l+\sinh\xi l)}\left\{\frac{1}{X}\left(M_2+\frac{R_2}{\xi}\right)+\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1-\frac{h}{2}\left(1+\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_2\right.$$
$$\left.-\frac{\varphi_2}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\right\}+\frac{\xi(\sinh\xi a_1-\cosh\xi a_1)}{2(\cosh\xi l-\sinh\xi l)}\left\{\frac{1}{X}\left(M_2-\frac{R_2}{\xi}\right)-\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1\right.$$
$$\left.-\frac{h}{2}\left(1-\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_2+\frac{\varphi_2}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\right\}-\frac{R_2}{X} \tag{37}$$

(36) 式と (37) 式は，連続の条件より相等しいと置き，

$$\frac{(\sinh\xi a_1+\cosh\xi a_1)\xi}{2}\left\{\frac{1}{X}\left(M_1-\frac{R_1}{\xi}\right)-\frac{h}{2}\left(1-\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_1-\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_2+\frac{\varphi_1}{\xi}\right.$$
$$\left.+\frac{h}{2}\mp h_m\right\}+\frac{(\sinh\xi a_1-\cosh\xi a_1)\xi}{2}\left\{\frac{1}{X}\left(M_1+\frac{R_1}{\xi}\right)-\frac{h}{2}\left(1+\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_1\right.$$
$$\left.+\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_2-\frac{\varphi_1}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\right\}+\frac{R_1}{X}=\frac{\xi(\sinh\xi a_1+\cosh\xi a_1)}{2(\cosh\xi l+\sinh\xi l)}\left\{\frac{1}{X}\left(M_2+\frac{R_2}{\xi}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1-\frac{h}{2}\left(1+\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_2-\frac{\varphi_2}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\right\}+\frac{\xi(\sinh\xi a_1-\cosh\xi a_1)}{2(\cosh\xi l-\sinh\xi l)}$$
$$\times\left\{\frac{1}{X}\left(M_2-\frac{R_2}{\xi}\right)-\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1-\frac{h}{2}\left(1-\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_2+\frac{\varphi_2}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\right\}-\frac{R_2}{X} \tag{38}$$

$$\alpha=\cosh\xi a_1+\sinh\xi a_1,\ \beta=\cosh\xi a_1-\sinh\xi a_1,\ \gamma=\cosh\xi l+\sinh\xi l,\ \delta=\cosh\xi l-\sinh\xi l \tag{39}$$

$$\left.\begin{aligned}
F_1&=\frac{h}{2}\left(1-\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_1+\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_2-\frac{\varphi_1}{\xi}-\frac{h}{2}\pm h_m\\
F_2&=\frac{h}{2}\left(1+\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_1-\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_2+\frac{\varphi_1}{\xi}-\frac{h}{2}\pm h_m\\
F_3&=\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1-\frac{h}{2}\left(1+\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_2-\frac{\varphi_2}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\\
F_4&=\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1+\frac{h}{2}\left(1-\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_2-\frac{\varphi_2}{\xi}-\frac{h}{2}\pm h_m
\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

(39) と (40) 式を (38) 式に代入して次式を得る。

$$\frac{\alpha}{2}\xi\left\{\frac{1}{X}\left(M_1-\frac{R_1}{\xi}\right)-F_1\right\}+\frac{\beta}{2}\xi\left\{\frac{1}{X}\left(M_1+\frac{R_1}{\xi}\right)-F_2\right\}+\frac{R_1}{X}$$
$$=\frac{\alpha}{2\gamma}\xi\left\{\frac{1}{X}\left(M_2+\frac{R_2}{\xi}\right)+F_3\right\}+\frac{\beta}{2\delta}\xi\left\{\frac{1}{X}\left(M_2-\frac{R_2}{\xi}\right)-F_4\right\}-\frac{R_2}{X}$$

これを書きかえ

$$(\alpha+\beta)M_1-\frac{1}{\xi}(\alpha-\beta-2)R_1\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\delta}\right)M_2-\frac{1}{\xi}\left(\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\delta}-2\right)R_2$$
$$-\left(\alpha F_1+\beta F_2+\frac{\alpha}{\gamma}F_3-\frac{\beta}{\delta}F_4\right)X=0 \tag{41}$$

また，撓みの式 (26), (27) を相等しいと置き次式を得る。

$$\frac{\alpha}{2}\left\{\frac{1}{X}\left(M_1-\frac{R_1}{\xi}\right)-\frac{h}{2}\left(1-\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_1-\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_2+\frac{\varphi_1}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\right\}$$
$$+\frac{\beta}{2}\left\{\frac{1}{X}\left(M_1+\frac{R_1}{\xi}\right)-\frac{h}{2}\left(1+\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_1+\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_2-\frac{\varphi_1}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\right\}$$
$$+\frac{R_1}{X}a_1-\frac{M_1}{X}=\frac{\alpha}{2\gamma}\left\{\frac{1}{X}\left(M_2+\frac{R_2}{\xi}\right)+\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1-\frac{h}{2}\left(1+\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_2\right.$$
$$\left.-\frac{\varphi_2}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\right\}+\frac{\beta}{2\delta}\left\{\frac{1}{X}\left(M_2-\frac{R_2}{\xi}\right)-\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1-\frac{h}{2}\left(1-\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_2\right.$$
$$\left.+\frac{\varphi_2}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\right\}+\frac{R_2(l-a_1)}{X}-\frac{M_2}{X} \tag{42}$$

(42) 式より

$$(\alpha+\beta)M_1-\frac{1}{\xi}(\alpha-\beta)R_1-\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\delta}\right)M_2-\frac{1}{\xi}\left(\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\delta}\right)R_2-\left(\alpha F_1+\beta F_2+\frac{\alpha}{\gamma}F_3\right.$$
$$\left.-\frac{\beta}{\delta}F_4\right)X+2a_1R_1-2M_1-2(l-a_1)R_2+2M_2=0$$

$$\therefore\quad(\alpha+\beta-2)M_1+\left\{2a_1-\frac{1}{\xi}(\alpha-\beta)\right\}R_1+\left(2-\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\delta}\right)M_2-\left\{\frac{1}{\xi}\left(\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\delta}\right)\right.$$
$$\left.+2(l-a_1)\right\}R_2-\left(\alpha F_1+\beta F_2+\frac{\alpha}{\gamma}F_3-\frac{\beta}{\delta}F_4\right)X=0 \tag{43}$$

(32) 式より，$R_2=P-R_1$，之を (41) 式と (43) 式に代入して，次式を得る。(41) 式より

$$(\alpha+\beta)M_1-\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\delta}\right)M_2-\left\{(\alpha-\beta)-\left(\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\delta}\right)\right\}\frac{R_1}{\xi}$$
$$-\frac{1}{\xi}\left(\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\delta}-2\right)P-\left(\alpha F_1+\beta F_2+\frac{\alpha}{\gamma}F_3-\frac{\beta}{\delta}F_4\right)X=0 \tag{44}$$

(43) 式より

$$(\alpha+\beta-2)M_1+\left\{2a_1-\frac{1}{\xi}(\alpha+\beta)+\frac{1}{\xi}\left(\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\delta}\right)+2(l-a_1)\right\}R_1+\left(2-\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\delta}\right)M_2$$
$$-\left\{\frac{1}{\xi}\left(\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\delta}\right)+2(l-a_1)\right\}P-\left(\alpha F_1+\beta F_2+\frac{\alpha}{\gamma}F_3-\frac{\beta}{\delta}F_4\right)X=0 \tag{45}$$

そこで，(33) 式と (44) 式より

$$\left[(\alpha+\beta)l-\left\{(\alpha-\beta)-\left(\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\delta}\right)\right\}\frac{1}{\xi}\right]M_1+\left[\left\{(\alpha-\beta)-\left(\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\delta}\right)\right\}\frac{1}{\xi}\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\delta}\right)l\right]M_1-\left[(\alpha-\beta)(l-a_1)+\left(\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\delta}\right)a_1-2l\right]\frac{P}{\xi}$$
$$-\left(\alpha F_1+\beta F_2+\frac{\alpha}{\gamma}F_3-\frac{\beta}{\delta}F_4\right)lX=0 \tag{46}$$

また，(33) 式と (45) 式より次式を得る。

$$-\left[2a_1-\frac{1}{\xi}(\alpha+\beta)+\frac{1}{\xi}\left(\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\delta}\right)+2(l-a_1)+(\alpha+\beta-2)l\right]M_1+\left[2a_1-\frac{1}{\xi}(\alpha+\beta)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\xi}\left(\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\delta}\right)+2(l-a_1)-\left(2-\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\delta}\right)l\right]M_2+\left[\left\{\frac{1}{\xi}\left(\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\delta}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left.+2(l-a_1)\right\}l-(l-a_1)\left\{2a_1-\frac{1}{\xi}(\alpha+\beta)+\frac{1}{\xi}\left(\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\delta}\right)+2(l-a_1)\right\}\right]P$$
$$+\left(\alpha F_1+\beta F_2+\frac{\alpha}{\gamma}F_3-\frac{\beta}{\delta}F_4\right)lX=0 \tag{47}$$

(46), (47) 式において

$$\left.\begin{aligned}
G_1&=(\alpha+\beta)l-\left\{(\alpha-\beta)-\left(\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\delta}\right)\right\}\frac{1}{\xi}\\
G_2&=\left\{(\alpha-\beta)-\left(\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\delta}\right)\right\}\frac{1}{\xi}-\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\delta}\right)l\\
G_3&=\left\{(\alpha-\beta)(l-a_1)+\left(\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\delta}\right)a_1-2l\right\}\frac{1}{\xi}\\
G_4&=2a_1-\frac{1}{\xi}(\alpha+\beta)+\frac{1}{\xi}\left(\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\delta}\right)+2(l-a_1)+(\alpha+\beta-2)l\\
G_5&=2a_1-\frac{1}{\xi}(\alpha+\beta)+\frac{1}{\xi}\left(\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\delta}\right)+2(l-a_1)-\left(2-\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\delta}\right)l\\
G_6&=\left\{\frac{1}{\xi}\left(\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\delta}\right)+2(l-a_1)\right\}l-(l-a_1)\left\{2a_1-\frac{1}{\xi}(\alpha+\beta)\right.\\
&\qquad\left.+\frac{1}{\xi}\left(\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\delta}\right)+2(l-a_1)\right\}
\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

とすれば，(46) 式は

$$G_1M_1+G_2M_2-G_3P-\left(\alpha F_1+\beta F_2+\frac{\alpha}{\gamma}F_3-\frac{\beta}{\delta}F_4\right)lX=0 \tag{49}$$

また，(47) 式は

$$-G_4M_1+G_5M_2+G_6P+\left(\alpha F_1+\beta F_2+\frac{\alpha}{\gamma}F_3-\frac{\beta}{\delta}F_4\right)lX=0 \tag{50}$$

(49) 式と (50) 式より，M_1，M_2 を求めれば次の如くである。

$$M_1=\frac{1}{G_1G_5+G_2G_4}\left[(G_3G_5+G_2G_6)P+\left(\alpha F_1+\beta F_2+\frac{\alpha}{\gamma}F_3-\frac{\beta}{\delta}F_4\right)(G_5+G_2)lX\right] \tag{51}$$

$$M_2=\frac{1}{G_2}\left\{G_3P+\left(\alpha F_1+\beta F_2+\frac{\alpha}{\gamma}F_3-\frac{\beta}{\delta}F_4\right)lX\right\}-\frac{G_1}{G_2(G_1G_5+G_2G_4)}$$
$$\times\left\{(G_3G_5+G_2G_6)P+\left(\alpha F_1+\beta F_2+\frac{\alpha}{\gamma}F_3-\frac{\beta}{\delta}F_4\right)(G_5+G_2)lX\right\} \tag{52}$$

次に，(33)式に(51)，(52)式を代入し

$$R_1=\frac{1}{l}\left\{M_1-M_2+P(l-a_1)\right\}=\frac{1}{l}\left[\frac{1}{G_1G_5+G_2G_4}\left\{(G_3G_5+G_2G_6)P\right.\right.$$
$$\left.+\left(\alpha F_1+\beta F_2+\frac{\alpha}{\gamma}F_3-\frac{\beta}{\delta}F_4\right)(G_5+G_2)lX\right\}\left(1+\frac{G_1}{G_2}\right)$$
$$\left.-\frac{1}{G_2}\left\{G_3P+\left(\alpha F_1+\beta F_2+\frac{\alpha}{\gamma}F_3-\frac{\beta}{\delta}F_4\right)lX\right\}+P(l-a_1)\right] \tag{53}$$

そこで，(32)式より

$$R_2=P-R_1=P-\frac{1}{l}\left[\frac{1}{G_1G_5+G_2G_4}\left\{(G_3G_5+G_2G_6)P\right.\right.$$
$$\left.+\left(\alpha F_1+\beta F_2+\frac{\alpha}{\gamma}F_3-\frac{\beta}{\delta}F_4\right)(G_5+G_2)lX\right\}\left(1+\frac{G_1}{G_2}\right)$$
$$\left.-\frac{1}{G_2}\left\{G_3P+\left(\alpha F_1+\beta F_2+\frac{\alpha}{\gamma}F_3-\frac{\beta}{\delta}F_4\right)lX\right\}+P(l-a_1)\right] \tag{54}$$

(51)，(52)，(53)，(54)式を，撓みの式(28)，(29)に代入すれば，任意の点に単一集中荷重が載る場合の撓みの計算式が得られる。しかるに，撓み式及び上述の式中に含まれる軸力 X は次式によつて求める事が出来る。一般式

$$X=\frac{A}{Il}\int_x\frac{y}{2}M_x\,dx \tag{55}$$

$$\therefore\quad X=\frac{A}{Il}\left\{\int_0^{a_1}\frac{y}{2}M_x\,dx+\int_{a_1}^{l}\frac{y}{2}M_x\,dx\right\} \tag{56}$$

そこで，$0\leqq x\leqq a_1$ においては，(28)，(30)式を用い

$$\frac{y}{2}M_x=\left[\frac{\cosh\xi x+\sinh\xi x}{4}\left\{\frac{1}{X}\left(M_1-\frac{R_1}{\xi}\right)-\frac{h}{2}\left(1-\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_1-\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_2\right.\right.$$
$$\left.+\frac{\varphi_1}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\right\}+\frac{\cosh\xi x-\sinh\xi x}{4}\left\{\frac{1}{X}\left(M_1+\frac{R_1}{\xi}\right)-\frac{h}{2}\left(1+\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_1\right.$$
$$\left.\left.+\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_2-\frac{\varphi_1}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\right\}+\frac{R_1}{2X}x-\frac{M_1}{2X}\pm\frac{h_m}{2}\right]\left[-\frac{(\cosh\xi x+\sinh\xi x)}{2}\right.$$
$$\times\left\{\frac{1}{X}\left(M_1-\frac{R_1}{\xi}\right)-\frac{h}{2}\left(1-\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_1-\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_2+\frac{\varphi_1}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\right\}X$$
$$-\frac{(\cosh\xi x-\sinh\xi x)}{2}\left\{\frac{1}{X}\left(M_1+\frac{R_1}{\xi}\right)-\frac{h}{2}\left(1+\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_1+\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_2\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\varphi_1}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\right\}X\right]$$

$$
\begin{aligned}
\frac{y}{2}M_x =& \frac{\sinh^2\xi x}{8}\left(\frac{2R_1}{X\xi}+F_1-F_2\right)^2 X-\frac{\cosh^2\xi x}{8}\left(\frac{2M_1}{X}-F_1-F_2\right)^2 X \\
&+\frac{1}{4}\cosh\xi x\sinh\xi x\left(\frac{2M_1}{X}-F_1-F_2\right)\left(\frac{2R_1}{X\xi}+F_1-F_2\right) \\
&+\frac{\sinh\xi x}{2}\left(\frac{2R_1}{X\xi}+F_1-F_2\right)\left(\frac{R_1}{2}x-\frac{M_1}{2}\pm\frac{h_m}{2}X\right) \\
&-\frac{\cosh\xi x}{2}\left(\frac{2M_1}{X}-F_1-F_2\right)\left(\frac{R_1}{2}x-\frac{M_1}{2}\pm\frac{h_m}{2}X\right) \\
=& \frac{\sinh^2\xi x}{8}\left(\frac{2R_1}{X\xi}+F_1-F_2\right)^2 X-\frac{\cosh^2\xi x}{8}\left(\frac{2M_1}{X}-F_1-F_2\right)^2 X \\
&+\frac{1}{4}\cosh\xi x\sinh\xi x\left(\frac{2M_1}{X}-F_1-F_2\right)\left(\frac{2R_1}{X\xi}+F_1-F_2\right) \\
&+\frac{x\sinh\xi x}{4}R_1\left(\frac{2R_1}{X\xi}+F_1-F_2\right)-\frac{\sinh\xi x}{2}\left(\frac{2R_1}{X\xi}+F_1-F_2\right) \\
&\times\left(\frac{M_1}{2}\mp\frac{h_m}{2}X\right)-\frac{x\cosh\xi x}{4}R_1\left(\frac{2M_1}{X}-F_1-F_2\right) \\
&+\frac{\cosh\xi x}{2}\left(\frac{2M_1}{X}-F_1-F_2\right)\left(\frac{M_1}{2}\mp\frac{h_m}{2}X\right)
\end{aligned}
\tag{57}
$$

また，$a_1\leqq x\leqq l$ においては，(29)，(31) 式を用い

$$
\begin{aligned}
\frac{y}{2}M_x =& -\left[\frac{\cosh\xi x+\sinh\xi x}{4(\cosh\xi l+\sinh\xi l)}\left\{\frac{1}{X}\left(M_2+\frac{R_2}{\xi}\right)+\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1-\frac{h}{2}\left(1+\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_2\right.\right. \\
&\left.-\frac{\varphi_2}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\right\}+\frac{\cosh\xi x-\sinh\xi x}{4(\cosh\xi l-\sinh\xi l)}\left\{\frac{1}{X}\left(M_2-\frac{R_2}{\xi}\right)-\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1\right. \\
&\left.\left.-\frac{h}{2}\left(1-\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_2+\frac{\varphi_2}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\right\}+\frac{R_2(l-x)}{2X}-\frac{M_2}{2X}\pm\frac{h_m}{2}\right] \\
&\times\left[\frac{\cosh\xi x+\sinh\xi x}{2(\cosh\xi l+\sinh\xi l)}\left\{\frac{1}{X}\left(M_2+\frac{R_2}{\xi}\right)+\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1-\frac{h}{2}\left(1+\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_2\right.\right. \\
&\left.-\frac{\varphi_2}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\right\}X+\frac{\cosh\xi x-\sinh\xi x}{2(\cosh\xi l-\sinh\xi l)}\left\{\frac{1}{X}\left(M_2-\frac{R_2}{\xi}\right)-\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1\right. \\
&\left.\left.-\frac{h}{2}\left(1-\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_2+\frac{\varphi_2}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\right\}X\right] \\
=& -\frac{\cosh^2\xi x}{8}\left\{\frac{1}{\cosh\xi l+\sinh\xi l}\left(\frac{M_2}{X}+\frac{R_2}{X\xi}+F_3\right)+\frac{1}{\cosh\xi l-\sinh\xi l}\right. \\
&\left.\times\left(\frac{M_2}{X}-\frac{R_2}{X\xi}-F_4\right)\right\}^2 X-\frac{\sinh^2\xi x}{8}\left\{\frac{1}{\cosh\xi l+\sinh\xi l}\left(\frac{M^2}{X}+\frac{R_2}{X\xi}+F_3\right)\right. \\
&\left.-\frac{1}{\cosh\xi l-\sinh\xi l}\left(\frac{M_2}{X}-\frac{R_2}{X\xi}-F_4\right)\right\}^2 X-\frac{\cosh\xi l\ \sinh\xi x}{4} \\
&\times\left\{\frac{1}{(\cosh\xi l+\sinh\xi l)^2}\left(\frac{M_1}{X}+\frac{R_2}{X\xi}+F_3\right)^2-\frac{1}{(\cosh\xi l-\sinh\xi l)^2}\left(\frac{M_2}{X}\right.\right. \\
&\left.\left.-\frac{R_2}{X\xi}-F_4\right)^2\right\}X+\frac{x\cosh\xi x}{4}\left\{\frac{1}{\cosh\xi l+\sinh\xi l}\left(\frac{M_2}{X}+\frac{R_2}{X\xi}+F_3\right)\right.
\end{aligned}
$$

$$+\frac{1}{\cosh\xi l-\sinh\xi l}\left(\frac{M_2}{X}-\frac{R_2}{X\xi}-F_4\right)\Bigg\}R_2+\frac{x\sinh\xi x}{4}\Bigg\{\frac{1}{\cosh\xi l+\sinh\xi l}$$
$$\times\left(\frac{M_2}{X}+\frac{R_2}{X\xi}+F_3\right)-\frac{1}{\cosh\xi l-\sinh\xi l}\left(\frac{M_2}{X}-\frac{R_2}{X\xi}-F_4\right)\Bigg\}R_2$$
$$-\frac{\cosh\xi x}{2}\Bigg\{\frac{1}{\cosh\xi l+\sinh\xi l}\left(\frac{M_2}{X}+\frac{R_2}{X\xi}+F_3\right)+\frac{1}{\cosh\xi l-\sinh\xi l}\left(\frac{M_2}{X}\right.$$
$$\left.-\frac{R_2}{X\xi}-F_4\right)\Bigg\}\left(\frac{R_2 l}{2}-\frac{M_2}{2}\pm\frac{h_m}{2}X\right)-\frac{\sinh\xi x}{2}\Bigg\{\frac{1}{\cosh\xi l+\sinh\xi l}$$
$$\times\left(\frac{M_2}{X}+\frac{R_2}{X\xi}+F_3\right)-\frac{1}{\cosh\xi l-\sinh\xi l}\left(\frac{M_2}{X}-\frac{R_2}{X\xi}+F_4\right)\Bigg\}\left(\frac{R_2 l}{2}\right.$$
$$\left.-\frac{M_2}{2}\pm\frac{h_m}{2}X\right) \tag{58}$$

次に，(57)，(58) 式よりそれぞれ

$$\int_0^{a_1}\frac{y}{2}M_x dx,\qquad \int_{a_1}^{l}\frac{y}{2}M_x dx$$

を求め，(56) 式に代入すれば，X の式が得られる。

$$X=\frac{A}{Il}\left[\frac{1}{16}\left(\frac{1}{\xi}\sinh\xi a_1\cosh\xi a_1-a_1\right)\left(\frac{2R_1}{X\xi}+F_1-F_2\right)^2X-\frac{1}{16}\left(\frac{1}{\xi}\cosh\xi a_1\sinh\xi a_1\right.\right.$$
$$\left.+a_1\right)\left(\frac{2M_1}{X}-F_1-F_2\right)^2X+\frac{1}{16\xi}\left(\cosh 2\xi a_1-1\right)\left(\frac{2M_1}{X}-F_1-F_2\right)\left(\frac{2R_1}{X\xi}+F_1-F_2\right)$$
$$+\frac{1}{4\xi}\left(a_1\cosh\xi a_1-\frac{1}{\xi}\sinh\xi a_1\right)\left(\frac{2R_1}{X\xi}+F_1-F_2\right)R_1-\frac{1}{2\xi}\left(\cosh\xi a_1-1\right)$$
$$\times\left(\frac{2R_1}{X\xi}+F_1-F_2\right)\left(\frac{M_1}{2}\mp\frac{h_m}{2}X\right)-\frac{1}{4\xi}\left(a_1\sinh\xi a_1-\frac{1}{\xi}\cosh\xi a_1+\frac{1}{\xi}\right)$$
$$\times\left(\frac{2M_1}{X}-F_1-F_2\right)R_1+\frac{1}{2\xi}\sinh\xi a_1\left(\frac{2M_1}{X}-F_1-F_2\right)\left(\frac{M_1}{2}\mp\frac{h_m}{2}X\right)$$
$$-\left\{\frac{1}{16\xi}\left(\cosh\xi l\sinh\xi l-\cosh\xi a_1\sinh\xi a_1\right)+\frac{1}{2}\left(l-a_1\right)\right\}\Bigg\{\frac{1}{\cosh\xi l+\sinh\xi l}$$
$$\times\left(\frac{M_2}{X}+\frac{R_2}{X\xi}+F_3\right)+\frac{1}{\cosh\xi l-\sinh\xi l}\left(\frac{M_2}{X}-\frac{R_2}{X\xi}-F_4\right)\Bigg\}^2X$$
$$-\left\{\frac{1}{16\xi}\left(\sinh\xi l\cosh\xi l-\sinh\xi a_1\cosh\xi a_1\right)-\frac{1}{16}\left(l-a_1\right)\right\}\Bigg\{\frac{1}{\cosh\xi l+\sinh\xi l}$$
$$\times\left(\frac{M_2}{X}-\frac{R_2}{X\xi}+F_3\right)-\frac{1}{\cosh\xi l-\sinh\xi l}\left(\frac{M_2}{X}-\frac{R^2}{X\xi}-F_4\right)\Bigg\}^2X-\frac{1}{16\xi}\left(\cosh 2\xi l\right.$$
$$\left.-\cosh 2\xi a_1\right)\Bigg\{\frac{1}{(\cosh\xi l+\sinh\xi l)^2}\left(\frac{M_1}{X}+\frac{R_2}{X\xi}+F_3\right)^2-\frac{1}{(\cosh\xi l-\sinh\xi l)^2}$$
$$\times\left(\frac{M_2}{X}-\frac{R_2}{X\xi}-F_4\right)^2\Bigg\}X+\frac{1}{4\xi}\left(l\sinh\xi l-\frac{1}{\xi}\cosh\xi l-a_1\sinh\xi a_1+\frac{1}{\xi}\cosh\xi a_1\right)$$
$$\times\Bigg\{\frac{1}{\cosh\xi l+\sinh\xi l}\left(\frac{M_2}{X}+\frac{R_2}{X\xi}+F_3\right)+\frac{1}{\cosh\xi l-\sinh\xi l}\left(\frac{M_2}{X}-\frac{R_2}{X\xi}-F_4\right)\Bigg\}R_2$$
$$+\frac{1}{4\xi}\left(l\cosh\xi l-\frac{1}{\xi}\sinh\xi l-a_1\cosh\xi a_1+\frac{1}{\xi}\sinh\xi a_1\right)\Bigg\{\frac{1}{\cosh\xi l+\sinh\xi l}\left(\frac{M_2}{X}\right.$$

$$+\frac{R_2}{X\xi}+F_3\Big)-\frac{1}{\cosh\xi l-\sinh\xi l}\left(\frac{M_2}{X}-\frac{R_2}{X\xi}-F_4\right)\Big\}R_2-\frac{1}{2\xi}\left(\sinh\xi l-\sinh\xi a_1\right)$$

$$\times\left\{\frac{1}{\cosh\xi l+\sinh\xi l}\left(\frac{M_2}{X}+\frac{R_2}{X\xi}+F_3\right)+\frac{1}{\cosh\xi l-\sinh\xi l}\left(\frac{M_2}{X}-\frac{R_2}{X\xi}-F_4\right)\right\}$$

$$\times\left(\frac{R_2 l}{2}-\frac{M_2}{2}\pm\frac{h_m}{2}X\right)-\frac{1}{2\xi}\left(\cosh\xi l-\cosh\xi a_1\right)\Big\{\frac{1}{\cosh\xi l+\sinh\xi l}\Big(\frac{M_2}{X}$$

$$+\frac{R_2}{X\xi}+F_3\Big)-\frac{1}{\cosh\xi l-\sinh\xi l}\left(\frac{M_2}{X}-\frac{R_2}{X\xi}+F_4\right)\Big\}\left(\frac{R_2 l}{2}-\frac{M_2}{2}\pm\frac{h_m}{2}X\right)\Big] \tag{59}$$

IV. 両端にモーメントの働かない場合の解式

両端におけるモーメント $M_1=M_2=0$ とし，$a_1=\varepsilon l$，$l-a_1=(1-\varepsilon)l$ とする。$0\leqq x\leqq a_1$ においては，(28) 式より

$$y=\frac{\cosh\xi x+\sinh\xi x}{2}\left\{-\frac{R_1}{X\xi}-\frac{h}{2}\left(1-\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_1-\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_2+\frac{\varphi_1}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\right\}$$
$$+\frac{\cosh\xi x-\sinh\xi x}{2}\left\{\frac{R_1}{X\xi}-\frac{h}{2}\left(1+\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_1+\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_2-\frac{\varphi_1}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\right\}$$
$$+\frac{R_1}{X}x\pm h_m \tag{60}$$

また，$a_1\leqq x\leqq l$ においては，(29) 式より

$$y=\frac{\cosh\xi x+\sinh\xi x}{2(\cosh\xi l+\sinh\xi l)}\left\{\frac{R_2}{X\xi}+\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1-\frac{h}{2}\left(1+\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_2-\frac{\varphi_2}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\right\}$$
$$+\frac{\cosh\xi x-\sinh\xi x}{2(\cosh\xi l-\sinh\xi l)}\Big\{-\frac{R_2}{X\xi}-\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1-\frac{h}{2}\left(1-\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_2+\frac{\varphi_2}{\xi}$$
$$+\frac{h}{2}\mp h_m\Big\}+\frac{R_2(l-x)}{X}\pm h_m \tag{61}$$

次に，(30) 式より，$0\leqq x\leqq a_1$ において

$$M_x=R_1x-X\Big[\frac{\cosh\xi x+\sinh\xi x}{2}\Big\{-\frac{R_1}{X\xi}-\frac{h}{2}\left(1-\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_1-\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_2+\frac{\varphi_1}{\xi}$$
$$+\frac{h}{2}\mp h_m\Big\}+\frac{\cosh\xi x-\sinh\xi x}{2}\Big\{\frac{R_1}{X\xi}-\frac{h}{2}\left(1+\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_1+\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_2-\frac{\varphi_1}{\xi}$$
$$+\frac{h}{2}\mp h_m\Big\}+\frac{R_1}{X}x\Big] \tag{62}$$

(31) 式より，$a_1\leqq x\leqq l$ において

$$M_x=R_2(l-x)-X\Big[\frac{\cosh\xi x+\sinh\xi x}{2(\cosh\xi l+\sinh\xi l)}\Big\{\frac{R_2}{X\xi}+\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1-\frac{h}{2}\left(1+\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_2$$
$$-\frac{\varphi_2}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\Big\}+\frac{\cosh\xi x-\sinh\xi x}{2(\cosh\xi l-\sinh\xi l)}\Big\{-\frac{R_2}{X\xi}-\frac{h}{2\xi l}\cos\varphi_1$$
$$-\frac{h}{2}\left(1-\frac{1}{\xi l}\right)\cos\varphi_2+\frac{\varphi_2}{\xi}+\frac{h}{2}\mp h_m\Big\}+\frac{R_2(l-x)}{X}\Big] \tag{63}$$

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{P(l-a_1)}{l} \\ R_2 &= P-\frac{P(l-a_1)}{l}=\frac{Pa_1}{l} \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

$$\begin{aligned} X=\frac{A}{Il}\Bigg[&\frac{1}{16}\left(\frac{1}{\xi}\sinh\xi a_1\cosh\xi a_1-a_1\right)\left(\frac{2R_1}{X\xi}+F_1-F_2\right)^2X-\frac{1}{16}\left(\frac{1}{\xi}\cosh\xi a_1\sinh\xi a_1\right.\\ &\left.+a_1\right)\left(F_1+F_2\right)^2X-\frac{1}{16\xi}\left(\cosh 2\xi a_1-1\right)\left(F_1+F_2\right)\left(\frac{2R_1}{X\xi}+F_1-F_2\right)+\frac{1}{4\xi}\left(a_1\cosh\xi a_1\right.\\ &\left.-\frac{1}{\xi}\sinh\xi a_1\right)\left(\frac{2R_1}{X\xi}+F_1-F_2\right)R_1\pm\frac{h_m}{4\xi}\left(\cosh\xi a_1-1\right)\left(\frac{2R_1}{X\xi}+F_1-F_2\right)X\\ &+\frac{1}{4\xi}\left(a_1\sinh\xi a_1-\frac{1}{\xi}\cosh\xi a_1+\frac{1}{\xi}\right)\left(F_1+F_2\right)R_1\pm\frac{h_m}{4\xi}\sinh\xi a_1\left(F_1+F_2\right)X\\ &-\left\{\frac{1}{16\xi}\left(\cosh\xi l\sinh\xi l-\cosh\xi a_1\sinh\xi a_1\right)+\frac{1}{2}\left(l-a_1\right)\right\}\left\{\frac{1}{\cosh\xi l+\sinh\xi l}\right.\\ &\left.\times\left(\frac{R_2}{X\xi}+F_3\right)-\frac{1}{\cosh\xi l-\sinh\xi l}\left(\frac{R_2}{X\xi}+F_4\right)\right\}^2X-\left\{\frac{1}{16\xi}\left(\sinh\xi l\cosh\xi l\right.\right.\\ &\left.\left.-\sinh\xi a_1\cosh\xi a_1\right)-\frac{1}{16}\left(l-a_1\right)\right\}\left\{\frac{1}{\cosh\xi l+\sinh\xi l}\left(F_3-\frac{R_2}{X\xi}\right)\right.\\ &\left.+\frac{1}{\cosh\xi l-\sinh\xi l}\left(\frac{R_2}{X\xi}+F_4\right)\right\}^2X-\frac{1}{16\xi}\left(\cosh 2\xi l-\cosh 2\xi a_1\right)\\ &\times\left\{\frac{1}{(\cosh\xi l+\sinh\xi l)^2}\left(\frac{R_2}{X\xi}+F_3\right)^2-\frac{1}{(\cosh\xi l-\sinh\xi l)^2}\left(\frac{R_2}{X\xi}+F_4\right)^2\right\}X\\ &+\frac{1}{4\xi}\left(l\sinh\xi l-\frac{1}{\xi}\cosh\xi l-a_1\sinh\xi a_1+\frac{1}{\xi}\cosh\xi a_1\right)\left\{\frac{1}{\cosh\xi l+\sinh\xi l}\left(\frac{R_2}{X\xi}\right.\right.\\ &\left.\left.+F_3\right)-\frac{1}{\cosh\xi l-\sinh\xi l}\left(\frac{R_2}{X\xi}+F_4\right)\right\}R_2+\frac{1}{4\xi}\left(l\cosh\xi l-\frac{1}{\xi}\sinh\xi l\right.\\ &\left.-a_1\cosh\xi a_1+\frac{1}{\xi}\sinh\xi a_1\right)\left\{\frac{1}{\cosh\xi l+\sinh\xi l}\left(\frac{R_2}{X\xi}+F_3\right)+\frac{1}{\cosh\xi l-\sinh\xi l}\right.\\ &\left.\times\left(\frac{R_2}{X\xi}+F_4\right)\right\}R_2-\frac{1}{2\xi}\left(\sinh\xi l-\sinh\xi a_1\right)\left\{\frac{1}{\cosh\xi l+\sinh\xi l}\left(\frac{R_2}{X\xi}+F_3\right)\right.\\ &\left.-\frac{1}{\cosh\xi l-\sinh\xi l}\left(\frac{R_2}{X\xi}+F_4\right)\right\}\left(\frac{R_2l}{2}\pm\frac{h_m}{2}X\right)-\frac{1}{2\xi}\left(\cosh\xi l-\cosh\xi a_1\right)\\ &\times\left\{\frac{1}{\cosh\xi l+\sinh\xi l}\left(\frac{R_2}{X\xi}+F_3\right)-\frac{1}{\cosh\xi l-\sinh\xi l}\left(F_4-\frac{R_2}{X\xi}\right)\right\}\left(\frac{R_2l}{2}\right.\\ &\left.\pm\frac{h_m}{2}X\right)\Bigg] \end{aligned} \tag{65}$$

上式において，F_1, F_2, F_3, F_4 は (40) 式，R_1, R_2 は (64) 式参照のこと。次に，(51), (52) 式において，$M_1=0$, $M_2=0$ と置き，φ_1, φ_2 を求むれば，φ_1 φ_2 が極めて小さい範囲において，次の式が得られる。

$$\varphi_1=K_1\frac{\xi\cdot P}{N_2\cdot l\cdot X}\pm\frac{N_3\xi}{N_2}h_m-\frac{N_1}{N_2}\varphi_2 \tag{66}$$

$$\varphi_2=\frac{1}{\frac{N_1^2}{2N_2^2}\cdot N_4+\frac{h}{2}N_5}\Bigg[-\left\{\frac{N_1}{\xi}-\frac{N_1^2}{N_2}\frac{1}{\xi}-\frac{\xi hN_1}{2N_2^2}N_4\left(K_1\frac{P}{lX}\pm N_3h_m\right)\right\}$$
$$\pm\sqrt{\left\{\frac{N_1}{\xi}-\frac{N_1^2}{N_2}\frac{1}{\xi}-\frac{\xi hN_1}{2N_2^2}\cdot N_4\left(K_1\frac{P}{lX}\pm N_3h_m\right)\right\}^2-\left(\frac{N_1^2}{N_2^2}N_4+h\cdot N_5\right)}$$
$$\overline{\times\left\{\left(\frac{N_1}{N_2}\xi-1\right)\frac{K_1P}{lX}\pm\left(\frac{N_1}{N_2}-1\right)N_3h_m+\frac{h}{4}N_4\left(K_1\frac{\xi}{N_2}\frac{P}{lX}\right)^2+\frac{h}{4}N_4\right.}$$
$$\overline{\left.\times\left(\frac{\xi}{N_2}N_3\cdot h_m\right)^2\pm\frac{h}{2}N_4\left(K_1\cdot N_3\frac{\xi^2}{N_2^2}\frac{P}{lX}h_m\right)\right\}}\Bigg] \tag{67}$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}
N_1&=\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\delta}\\
N_2&=\alpha-\beta\\
N_3&=(\alpha+\beta)-\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\delta}\right)\\
N_4&=(\alpha+\beta)-\frac{1}{\xi l}\left\{(\alpha-\beta)-\left(\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\delta}\right)\right\}=(\alpha+\beta)-\frac{1}{\xi l}(N_2-N_1)\\
N_5&=\frac{1}{\xi l}\left\{(\alpha-\beta)-\left(\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\beta}{\delta}\right)\right\}-\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\delta}\right)=\frac{1}{\xi l}(N_2-N_1)-\left(\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\beta}{\delta}\right)
\end{aligned}\right\} \tag{68}$$

$$K_1=\frac{G_3G_5+G_2G_6}{G_5+G_2} \tag{69}$$

更に，簡単のため，φ_1，φ_2 に従来の公式を拡張せるものを用いれば，計算はより容易である。すなわち，軸張力の場合

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1&=\frac{Pl^2}{4EI}f_1\cdot S(\xi)\\
\varphi_2&=\frac{Pl^2}{4EI}f_2\cdot S'(\xi)
\end{aligned}\right\} \tag{70}$$

軸圧力の場合

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1&=\left\{\left(\frac{Pl^2}{2EI}f_1\right)_{X\to 0}-\frac{Pl^2}{4EI}f_1\right\}N(\xi)\\
\varphi_2&=\left\{\left(\frac{Pl^2}{2EI}f_2\right)_{X\to 0}-\frac{Pl^2}{4EI}f_2\right\}N'(\xi)
\end{aligned}\right\} \tag{71}$$

ここに

$$\left.\begin{aligned}
f_1&=\omega^{-2}\left\{\frac{\sinh 2\varepsilon\omega+\cosh 2\varepsilon\omega-\sinh 2(2-\varepsilon)\omega-\cosh 2(2-\varepsilon)\omega}{\sinh 4\omega+\cosh 4\omega-1}+1-\varepsilon\right\}\\
f_2&=\omega^{-2}\left\{\frac{\sinh 2(1-\varepsilon)\omega+\cosh 2(1-\varepsilon)\omega-\sinh 2(1+\varepsilon)\omega-\cosh 2(1+\varepsilon)\omega}{\sinh 4\omega+\cosh 4\omega-1}+\varepsilon\right\}\\
\omega&=\frac{l}{2}\xi,\qquad \varepsilon=\frac{a_1}{l},\qquad (0<\varepsilon<+1.0)\\
&S(\xi),\ S'(\xi),\ N(\xi),\ N'(\xi):\ \xi\text{ の函数的係数}
\end{aligned}\right\} \tag{72}$$

(70), (71) 式において，$S(\xi)$, $S'(\xi)$, $N(\xi)$, $N'(\xi)$ 共，1.0 の場合は，従来の公式となり，計算は更に簡単である。すなわち，

軸張力の場合

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{Pl^2}{4EI} f_1 \\ \varphi_2 &= \frac{Pl^2}{4EI} f_2\end{aligned}\right\} \tag{73}$$

軸圧力の場合

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1 &= \left(\frac{Pl^2}{2EI} f_1\right)_{X\to 0} - \frac{Pl^2}{4EI} f_1 \\ \varphi_2 &= \left(\frac{Pl_2}{2EI} f_2\right)_{X\to 0} - \frac{Pl^2}{4EI} f_2\end{aligned}\right\} \tag{74}$$

ここに，f_1, f_2 等は (72) 式の通りとする。

次に，計算に用いる理論を二つに分け，合成理論，本理論とする。

合成理論：　撓み，軸力，反力，モーメント等，総て，著者の理論公式によるが，撓角 φ_1, φ_2 だけ余りに計算が面倒になるので，従来の厳密理論公式を採用する場合 ((60)～(65), (73), (74) 採用)。

本 理 論：　撓み，軸力，反力，モーメント等，総て，著者の理論公式によるのはもちろんであるが，更に，撓角，φ_1, φ_2 も著者の厳密理論公式を採用する場合 ((60)～(69) 採用)。次に中間理論として，本理論の φ_1, φ_2 の公式，(66), (67), (68), (69) 式の代りに，(70), (71), (72) 式を採用し，合成理論よりも，本理論に，計算結果が近付くように $S(\xi)$, $S'(\xi)$, $N(\xi)$, $N'(\xi)$ の数値を決定すれば，(66), (67), (68), (69) 式を用いるよりは遙かに計算は容易である。

V. 計　算　例

上述の理論を用い，両端にモーメントの働かない場合について，研究第1報[2)] と同様，3種の材料，鋼鉄，白樫，孟宗竹の支間 $l=40\,\mathrm{cm}$ の矩形断面小形模型梁について計算を行なつた。すなわち，単一集中荷重 $P=0.20\,\mathrm{kg}$ が梁の任意の点に載る場合に，(1) 軸力 X の作用線が中心線と一致する場合 ($h_m=0$)。(2) 軸力 X が中心線より下方 $\frac{h}{4}$ の線に作用する場合 $\left(h_m=\frac{h}{4}\right)$。(3) 軸力 X が中心線より下方 $\frac{h}{2}$ の線，すなわち，底面に作用する場合 $\left(h_m=\frac{h}{2}\right)$。(4) 軸力 X が中心線より上方 $\frac{h}{4}$ の線に作用する場合 $\left(h_m=-\frac{h}{4}\right)$。(5) 軸力 X が中心線より上方 $\frac{h}{2}$ の線，すなわち，上面に作用する場合 $\left(h_m=-\frac{h}{2}\right)$ の5つの場合について，軸力 X，両端

---

2) 中村作太郎：桁梁の撓み理論に関する基礎的研究 (I). 室蘭工業大学研究報告，第2巻，第2号，1956.

における撓角, φ_1, φ_2, 任意の点の撓み y などを厳密に計算した。なお, 梁の寸法, その他諸数値は第1表, 第2表の如くである。

第 1 表 梁に関する諸数値 (1)

種　　別	b (cm)	h (cm)	l (cm)	P (kg)	A (cm^2)	h_m (cm)
鋼鉄梁	1.600	0.450	40.00	0.200	0.720000	0～±0.2250
白樫梁	1.567	0.439	40.00	0.200	0.691864	0～±0.2195
孟宗竹梁	1.340	0.438	40.00	0.200	0.586701	0～±0.2190

第 2 表 梁に関する諸数値 (2)

種　　別	E (kg/cm^2)	G (kg/cm^2)	k	I_Z (cm^4)	r_z (cm)
鋼鉄梁	2,100,000	830,000	1.50	0.012150	0.1299038
白樫梁	135,000	97,000	1.50	0.011125	0.1268062
孟宗竹梁	150,000	77,000	1.50	0.009380	0.1264425

(註) b …… 梁断面の幅 (cm)
l …… 支　間 (cm)
h …… 梁断面の高さ (cm)
P …… 集中荷重 (kg)
A …… 断面積 (cm^2)
E …… 弾性率 (kg/cm^2)
G …… 剪断弾性係数 (kg/cm^2)
ε …… $\dfrac{a_1}{l}$
k …… 剪断弾性補正係数
I_Z …… Z軸に関する慣性能率 (cm^4)
r_Z …… Z軸に関する環動半径 (cm)
h_m …… 梁の中心線より軸力の作用線までの距離 (cm)
(中心線より下方の場合は(+), 上方の場合は(−)とする。)

1 軸力 X の計算

公式(65)に含まれる各種の函数の値を ξ の変化について, 一つ一つ計算し, 函数表を作成(65)式に, 試索的に, これらの諸数値の代入を繰返す事によつて, (65)式を満足する X の値を見出した。

(1) 合成理論による計算結果

第 3 表　$h_m=0$ の場合

ε	鋼鉄梁		白樫梁		孟宗竹梁	
	ξ	X (kg)	ξ	X (kg)	ξ	X (kg)
0.1	0.005900	$+0.024662\ (1\pm8.11595i)$	0.01470	$+0.092665\ (1\pm7.71020i)$	0.01119	$+0.086903\ (1\pm7.67916i)$
0.2	0.009635	$+0.067608\ (1\pm6.20500i)$	0.02070	$+0.183617\ (1\pm5.89480i)$	0.01588	$+0.17474\ (1\pm5.87142i)$
0.3	0.012257	$+0.109271\ (1\pm5.05162i)$	0.02519	$+0.271706\ (1\pm4.79940i)$	0.01975	$+0.270251\ (1\pm4.78080i)$
0.4	0.014810	$+0.159439\ (1\pm4.07137i)$	0.03154	$+0.426026\ (1\pm3.86783i)$	0.02446	$+0.414608\ (1\pm3.85253i)$
0.5	0.017138	$+0.213433\ (1\pm3.55956i)$	0.03819	$+0.627030\ (1\pm3.38200i)$	0.02942	$+0.599897\ (1\pm3.36847i)$

(註) X: 軸張力

第 4 表　$h_m=\dfrac{h}{4}$ の場合

ε	鋼鉄梁		白樫梁		孟宗竹梁	
	ξ	X (kg)	ξ	X (kg)	ξ	X (kg)
0.1	0.01209	$-0.106216\ (1\mp0.79893i)$	0.03053	$-0.399096\ (1\mp0.81578i)$	0.02324	$-0.374277\ (1\mp0.82334i)$
0.2	0.01644	$-0.196575\ (1\mp1.01098i)$	0.03790	$-0.533380\ (1\mp1.03223i)$	0.02708	$-0.508057\ (1\mp1.04149i)$
0.3	0.02000	$-0.262210\ (1\mp1.15950i)$	0.04350	$-0.651993\ (1\mp1.18436i)$	0.03006	$-0.648503\ (1\mp1.19506i)$
0.4	0.02168	$-0.341656\ (1\mp1.29340i)$	0.04613	$-0.912915\ (1\mp1.32056i)$	0.03577	$-0.888449\ (1\mp1.33249i)$
0.5	0.02371	$-0.408653\ (1\mp1.42174i)$	0.05289	$-1.200553\ (1\mp1.45186i)$	0.04068	$-1.148603\ (1\mp1.46507i)$

(註) X: 軸圧力

第 5 表　$h_m=\dfrac{h}{2}$ の場合

ε	鋼鉄梁		白樫梁		孟宗竹梁	
	ξ	X (kg)	ξ	X (kg)	ξ	X (kg)
0.1	0.01042	$-0.079043\ (1\mp0.33346i)$	0.02633	$-0.296996\ (1\mp0.35018i)$	0.02633	$-0.278528\ (1\mp0.35510i)$
0.2	0.01508	$-0.165161\ (1\mp0.40817i)$	0.03236	$-0.448562\ (1\mp0.42861i)$	0.03236	$-0.426865\ (1\mp0.43460i)$
0.3	0.01841	$-0.246357\ (1\mp0.46132i)$	0.03760	$-0.612574\ (1\mp0.48437i)$	0.03760	$-0.609295\ (1\mp0.49118i)$
0.4	0.02047	$-0.304409\ (1\mp0.54200i)$	0.04352	$-0.813390\ (1\mp0.56910i)$	0.04352	$-0.791591\ (1\mp0.57707i)$
0.5	0.02255	$-0.369467\ (1\mp0.62108i)$	0.05033	$-1.085431\ (1\mp0.65216i)$	0.05033	$-1.033462\ (1\mp0.66133i)$

(註) X: 軸圧力

第 6 表　$h_m=-\frac{h}{4}$ の 場 合

ε	鋼鉄梁 ξ	鋼鉄梁 X (kg)	白樫梁 ξ	白樫梁 X (kg)	孟宗竹梁 ξ	孟宗竹梁 X (kg)
0.1	0.01159	$+0.099087\ (1\pm0.59951i)$	0.02948	$+0.372309\ (1\pm0.59102i)$	0.02245	$+0.349158\ (1\pm0.58686i)$
0.2	0.01467	$+0.156477\ (1\pm0.72100i)$	0.03150	$+0.424977\ (1\pm0.71019i)$	0.02416	$+0.404421\ (1\pm0.70523i)$
0.3	0.01710	$+0.212469\ (1\pm0.82250i)$	0.03616	$+0.528311\ (1\pm0.81066i)$	0.02754	$+0.525483\ (1\pm0.80503i)$
0.4	0.01979	$+0.284664\ (1\pm0.89500i)$	0.04208	$+0.760631\ (1\pm0.88158i)$	0.03291	$+0.740246\ (1\pm0.87543i)$
0.5	0.02242	$+0.365387\ (1\pm0.91193i)$	0.05064	$+1.073444\ (1\pm0.89832i)$	0.03[illegible]43	$+1.026994\ (1\pm0.89203i)$

(註) X: 軸 張 力

第 7 表　$h_m=-\frac{h}{2}$ の 場 合

ε	鋼鉄梁 ξ	鋼鉄梁 X (kg)	白樫梁 ξ	白樫梁 X (kg)	孟宗竹梁 ξ	孟宗竹梁 X (kg)
0.1	0.008386	$+0.051253\ (1\pm1.13500i)$	0.02120	$+0.192578\ (1\pm1.11003i)$	0.01614	$+0.180603\ (1\pm1.09668i)$
0.2	0.010930	$+0.086850\ (1\pm0.98763i)$	0.02346	$+0.235876\ (1\pm0.96590i)$	0.01800	$+0.224467\ (1\pm0.95441i)$
0.3	0.013550	$+0.133474\ (1\pm0.83320i)$	0.02784	$+0.331887\ (1\pm0.81487i)$	0.02183	$+0.330111\ (1\pm0.80522i)$
0.4	0.016560	$+0.199444\ (1\pm0.67319i)$	0.03526	$+0.532920\ (1\pm0.65839i)$	0.02736	$+0.518638\ (1\pm0.65050i)$
0.5	0.019800	$+0.284785\ (1\pm0.52857i)$	0.04416	$+0.836650\ (1\pm0.51697i)$	0.03399	$+0.800446\ (1\pm0.51080i)$

(註) X: 軸 張 力

(2) 本理論による計算結果

第 8 表　$h_m=0$ の 場 合

ε	鋼鉄梁 ξ	鋼鉄梁 X (kg)	白樫梁 ξ	白樫梁 X (kg)	孟宗竹梁 ξ	孟宗竹梁 X (kg)
0.1	0.02506	$+0.26302\ (1\pm6.25620i)$	0.02506	$+0.29492\ (1\pm5.42561i)$	0.02491	$+0.28259\ (1\pm5.32256i)$
0.2	0.02794	$+0.32694\ (1\pm4.62972i)$	0.02787	$+0.36481\ (1\pm4.66211i)$	0.02782	$+0.35246\ (1\pm4.42531i)$
0.3	0.03012	$+0.37997\ (1\pm3.42540i)$	0.03003	$+0.42347\ (1\pm4.10602i)$	0.02998	$+0.40932\ (1\pm4.00051i)$
0.4	0.03363	$+0.47375\ (1\pm2.96351i)$	0.03352	$+0.52770\ (1\pm3.65235i)$	0.03340	$+0.50804\ (1\pm3.50253i)$
0.5	0.03708	$+0.57850\ (1\pm1.62345i)$	0.03524	$+0.58367\ (1\pm3.18775i)$	0.03664	$+0.61387\ (1\pm3.30221i)$

(註) X: 軸 張 力

第 9 表　$h_m = \dfrac{h}{4}$ の 場 合

ε	鋼鉄梁 ξ	鋼鉄梁 X (kg)	白樫梁 ξ	白樫梁 X (kg)	孟宗竹梁 ξ	孟宗竹梁 X (kg)
0.1	0.02510	$-0.26388\ (1\mp0.88621i)$	0.02535	$-0.30186\ (1\mp0.65231i)$	0.02502	$-0.28505\ (1\mp0.67510i)$
0.2	0.02806	$-0.32976\ (1\mp1.25023i)$	0.02794	$-0.36661\ (1\mp0.72532i)$	0.02785	$-0.35323\ (1\mp0.73251i)$
0.3	0.03024	$-0.38304\ (1\mp1.30523i)$	0.03006	$-0.42433\ (1\mp0.80622i)$	0.03001	$-0.41007\ (1\mp0.81922i)$
0.4	0.03377	$-0.47765\ (1\mp1.46525i)$	0.03356	$-0.52895\ (1\mp0.88329i)$	0.03346	$-0.50988\ (1\mp0.89991i)$
0.5	0.03720	$-0.54760\ (1\mp1.68416i)$	0.03528	$-0.58509\ (1\mp0.95345i)$	0.03670	$-0.61587\ (1\mp0.94023i)$

(註) X: 軸 圧 力

第 10 表　$h_m = \dfrac{h}{2}$ の 場 合

ε	鋼鉄梁 ξ	鋼鉄梁 X (kg)	白樫梁 ξ	白樫梁 X (kg)	孟宗竹梁 ξ	孟宗竹梁 X (kg)
0.1	0.02516	$-0.26516\ (1\mp0.48921i)$	0.02551	$-0.30568\ (1\mp0.36224i)$	0.02512	$-0.28737\ (1\mp0.37571i)$
0.2	0.02807	$-0.32994\ (1\mp0.57216i)$	0.02795	$-0.36691\ (1\mp0.38551i)$	0.02791	$-0.35473\ (1\mp0.39662i)$
0.3	0.03029	$-0.38431\ (1\mp0.66254i)$	0.03010	$-0.42548\ (1\mp0.40226i)$	0.03002	$-0.41035\ (1\mp0.42056i)$
0.4	0.03382	$-0.47905\ (1\mp0.72539i)$	0.03361	$-0.53055\ (1\mp0.44765i)$	0.03348	$-0.51049\ (1\mp0.45620i)$
0.5	0.03725	$-0.54840\ (1\mp0.82694i)$	0.03533	$-0.58683\ (1\mp0.47654i)$	0.03672	$-0.61657\ (1\mp0.47001i)$

(註) X: 軸 圧 力

第 11 表　$h_m = -\dfrac{h}{4}$ の 場 合

ε	鋼鉄梁 ξ	鋼鉄梁 X (kg)	白樫梁 ξ	白樫梁 X (kg)	孟宗竹梁 ξ	孟宗竹梁 X (kg)
0.1	0.02503	$+0.26238\ (1\pm0.79256i)$	0.02502	$+0.29396\ (1\pm0.55992i)$	0.02484	$+0.28101\ (1\pm0.54425i)$
0.2	0.02790	$+0.32609\ (1\pm0.83621i)$	0.02782	$+0.36351\ (1\pm0.57221i)$	0.02780	$+0.35196\ (I\pm0.56990i)$
0.3	0.03010	$+0.37946\ (1\pm0.91256i)$	0.03002	$+0.42318\ (1\pm0.64566i)$	0.02984	$+0.40552\ (1\pm0.63785i)$
0.4	0.03360	$+0.47285\ (1\pm0.97458i)$	0.03349	$+0.52675\ (1\pm0.71123i)$	0.03332	$+0.50561\ (1\pm0.70052i)$
0.5	0.03705	$+0.48080\ (1\pm0.99625i)$	0.03521	$+0.58261\ (1\pm0.76775i)$	0.03656	$+0.61107\ (1\pm0.76996i)$

(註) X: 軸 張 力

第12表 $h_m=-\frac{h}{2}$ の場合

ε	鋼鉄梁		白樫梁		孟宗竹梁	
	ξ	X (kg)	ξ	X (kg)	ξ	X (kg)
0.1	0.02501	$+0.26195\ (1\pm 0.89253i)$	0.02501	$+0.29372\ (1\pm 0.94253i)$	0.02475	$+0.27901\ (1\pm 0.93241i)$
0.2	0.02786	$+0.32509\ (1\pm 0.83211i)$	0.02780	$+0.36301\ (1\pm 0.86257i)$	0.02776	$+0.35097\ (1\pm 0.85994i)$
0.3	0.03002	$+0.37741\ (1\pm 0.75626i)$	0 03001	$+0.42290\ (1\pm 0.77620i)$	0.02982	$+0.40502\ (1\pm 0.76205i)$
0.4	0.03362	$+0.47345\ (1\pm 0.69425i)$	0.03345	$+0.52555\ (1\pm 0.66996i)$	0.03330	$+0.50499\ (1\pm 0.66004i)$
0.5	0.03707	$+0.48120\ (1\pm 0.64243i)$	0.03517	$+0.58120\ (1\pm 0.63101i)$	0.03654	$+0.61037\ (1\pm 0.64256i)$

(註) X: 軸張力

2. 撓角 φ_1, φ_2 の計算

(1) 合成理論による計算結果

第13表 $h_m=0$ の場合

ε	鋼鉄梁			白樫梁			孟宗竹梁		
	ξ	φ_1	φ_2	ξ	φ_1	φ_2	ξ	φ_1	φ_2
0.1	0.005900	0.00039593	0.00021409	0.01470	0.0067952	0.0036412	0.01119	0.0069430	0.0036946
0.2	0.009635	0.00060749	0.00041390	0.02070	0.0098404	0.0065770	0.01588	0.010464	0.0070034
0.3	0.012257	0.00074734	0.00058421	0.02519	0.0119320	0.0091717	0.01975	0.012645	0.0097325
0.4	0.014810	0.00082145	0.00071945	0.03154	0.0127660	0.0110700	0.02446	0.013562	0.0117650
0.5	0.017138	0.00080533	0.00080533	0.03819	0.0122320	0.0122320	0.02942	0.012974	0.0129740

第14表 $h_m=\frac{h}{4}$ の場合

ε	鋼鉄梁 ξ	鋼鉄梁 φ_1	鋼鉄梁 φ_2	白樫梁 ξ	白樫梁 φ_1	白樫梁 φ_1	孟宗竹梁 ξ	孟宗竹梁 φ_1	孟宗竹梁 φ_2
0.1	0.01209	0.00041765	0.00022158	0.03053	0.0070205	0.0037646	0.02324	0.0081125	0.0044017
0.2	0.01644	0.00062716	0.00043088	0.03790	0.0115450	0.0081594	0.02708	0.0123010	0.0086581
0.3	0.02000	0.00076917	0.00060567	0.04350	0.0144530	0.0114420	0.03006	0.0153580	0.0123490
0.4	0.02168	0.00086186	0.00075403	0.04613	0.0163850	0.0144820	0.03577	0.0175680	0.0155330
0.5	0.02371	0.00084870	0.00084870	0.05289	0.0167980	0.0167980	0.04068	0.0178400	0.0178400

第15表 $h_m=\frac{h}{2}$ の場合

ε	鋼鉄梁 ξ	鋼鉄梁 φ_1	鋼鉄梁 φ_2	白樫梁 ξ	白樫梁 φ_1	白樫梁 φ_2	孟宗竹梁 ξ	孟宗竹梁 φ_1	孟宗竹梁 φ_2
0.1	0.01042	0.00041652	0.00022129	0.02633	0.0075518	0.0040657	0.02633	0.0082039	0.0044579
0.2	0.01508	0.00062676	0.00043043	0.03236	0.0114030	0.0080233	0.03236	0.0124990	0.0088429
0.3	0.01841	0.00077173	0.00060932	0.03760	0.0142530	0.0114790	0.03760	0.0157470	0.0127320
0.4	0.02047	0.00086107	0.00075337	0.04352	0.0162720	0.0143760	0.04352	0.0180460	0.0159840
0.5	0.02255	0.00084710	0.00084710	0.05033	0.0166780	0.0166780	0.05033	0.0184700	0.0184700

第16表 $h_m=-\frac{h}{4}$ の場合

ε	鋼鉄梁 ξ	鋼鉄梁 φ_1	鋼鉄梁 φ_2	白樫梁 ξ	白樫梁 φ_1	白樫梁 φ_2	孟宗竹梁 ξ	孟宗竹梁 φ_1	孟宗竹梁 φ_2
0.1	0.01159	0.00039217	0.00021307	0.02948	0.0061504	0.0032769	0.02245	0.0066083	0.0034891
0.2	0.01467	0.00060605	0.00041223	0.03150	0.0095129	0.0063115	0.02416	0.0101530	0.0067136
0.3	0.01710	0.00074586	0.00058211	0.03616	0.0115700	0.0088032	0.02754	0.0120270	0.0093585
0.4	0.01979	0.00081818	0.00071673	0.04208	0.0123140	0.0107180	0.03291	0.0130410	0.0112730
0.5	0.02242	0.00080004	0.00080004	0.05064	0.0116470	0.0116470	0.03843	0.0123860	0.0123860

第17表 $h_m = -\frac{h}{2}$ の場合

ε	鋼鉄梁 ξ	鋼鉄梁 φ_1	鋼鉄梁 φ_2	白樫梁 ξ	白樫梁 φ_1	白樫梁 φ_2	孟宗竹梁 ξ	孟宗竹梁 φ_1	孟宗竹梁 φ_2
0.1	0.008386	0.00039429	0.00021365	0.02120	0.0063378	0.0033829	0.01614	0.0067960	0.0036040
0.2	0.010930	0.00060711	0.00041347	0.02346	0.0097697	0.0065091	0.01800	0 0103840	0.0069292
0.3	0.013550	0.00074695	0.00058365	0.02784	0.0118440	0.0090827	0.02183	0.0125430	0.0096328
0.4	0.016560	0.00082030	0.00071849	0.03526	0.0126060	0.0109190	0.02736	0.0133830	0.0115960
0.5	0.019800	0.00080350	0.00080350	0.04416	0.0119510	0.0119510	0.03399	0.0126760	0.0126760

(2) 本理論による計算結果

第18表 $h_m = 0$ の場合

ε	鋼鉄梁 ξ	鋼鉄梁 φ_1	鋼鉄梁 φ_2	白樫梁 ξ	白樫梁 φ_1	白樫梁 φ_2	孟宗竹梁 ξ	孟宗竹梁 φ_1	孟宗竹梁 φ_2
0.1	0.02506	0.00053659	0.00018962	0.02506	0.0087504	0.0030002	0.02491	0.0091490	0.0030997
0.2	0.02794	0.00072268	0.00038744	0.02787	0.0115880	0.0060807	0.02782	0.0120190	0.0059050
0.3	0.03012	0.00081609	0.00056205	0.03003	0.0129490	0.0087839	0.02998	0.0133600	0.0087790
0.4	0.03363	0.00084956	0.00070028	0.03352	0.0133150	0.0108530	0.03340	0.0136620	0.0111030
0.5	0.03708	0.00078817	0.00078817	0.03524	0.0123710	0.0123710	0.03664	0.0125030	0.0125030

第19表 $h_m = \frac{h}{4}$ の場合

ε	鋼鉄梁 ξ	鋼鉄梁 φ_1	鋼鉄梁 φ_2	白樫梁 ξ	白樫梁 φ_1	白樫梁 φ_2	孟宗竹梁 ξ	孟宗竹梁 φ_1	孟宗竹梁 φ_2
0.1	0.02510	0.00059710	0.00020150	0.02535	0.0105410	0.0036479	0.02502	0.0114310	0.0039907
0.2	0.02806	0.00075660	0.00041299	0.02794	0.0135490	0.0075189	0.02785	0.0147960	0.0082508
0.3	0.03024	0.00085286	0.00059909	0.03006	0.0154100	0.0109450	0.03001	0.0168910	0.0120370
0.4	0.03377	0.00091328	0.00075114	0.03356	0.0166360	0.0137960	0.03346	0.0182980	0.0152070
0.5	0.03720	0.00086229	0.00086229	0.03528	0.0159700	0.0159700	0.03670	0.0175810	0.0175810

第20表　$h_m = \frac{h}{2}$ の場合

ε	鋼鉄梁 ξ	鋼鉄梁 φ_1	鋼鉄梁 φ_2	白樫梁 ξ	白樫梁 φ_1	白樫梁 φ_2	孟宗竹梁 ξ	孟宗竹梁 φ_1	孟宗竹梁 φ_2
0.1	0.02516	0.00059685	0.00020151	0.02551	0.010546	0.0036497	0.02512	0.011435	0.0039923
0.2	0.02807	0.00075660	0.00041299	0.02795	0.013549	0.0075192	0.02791	0.014798	0.0082527
0.3	0.03029	0.00085289	0.00059911	0.03010	0.015411	0.0109460	0 03002	0.016892	0.0120380
0.4	0.03382	0.00091331	0.00075117	0.03361	0.016638	0.0137980	0.03348	0.018299	0.0152080
0.5	0.03725	0.00086232	0.00086232	0.03533	0.015973	0.0159730	0.03672	0.017582	0.0175820

第21表　$h_m = -\frac{h}{4}$ の場合

ε	鋼鉄梁 ξ	鋼鉄梁 φ_1	鋼鉄梁 φ_2	白樫梁 ξ	白樫梁 φ_1	白樫梁 φ_2	孟宗竹梁 ξ	孟宗竹梁 φ_1	孟宗竹梁 φ_2
0.1	0.02503	0.00053662	0.00018962	0.02502	0.0087517	0.0030006	0.02484	0.0091533	0.0031008
0.2	0.02790	0.00072304	0.00038745	0.02782	0.0115900	0.0060818	0.02780	0.0120190	0.0062342
0.3	0.03010	0.00081610	0.00056206	0.03002	0.0129490	0.0087842	0.02984	0,0133670	0.0090166
0.4	0.03360	0.00084958	0.00070030	0.03349	0.0133160	0.0108540	0.03332	0.0136670	0.0111080
0.5	0.03705	0.00078819	0.00078819	0.03521	0.0123720	0.0123720	0.03656	0.0125080	0.0125080

第22表　$h_m = -\frac{h}{2}$ の場合

ε	鋼鉄梁 ξ	鋼鉄梁 φ_1	鋼鉄梁 φ_2	白樫梁 ξ	白樫梁 φ_1	白樫梁 φ_2	孟宗竹梁 ξ	孟宗竹梁 φ_1	孟宗竹梁 φ_2
0.1	0.02501	0.00053663	0.00018963	0.02501	0.0087521	0.0030008	0.02475	0.0091557	0.0031023
0.2	0.02786	0.00072305	0.00038747	0.02780	0.0115900	0.0060823	0.02776	0.0120220	0.0062367
0.3	0.03002	0.00081612	0.00056209	0.03001	0.0129500	0.0087846	0.02982	0.0133720	0.0090176
0.4	0.03362	0.00084957	0.00070029	0.03345	0.0133180	0.0108560	0.03330	0.0136680	0.0111090
0.5	0.03707	0.00078818	0.00078818	0.03517	0.0123740	0.0123740	0.03654	0.0125100	0.0125100

3. 撓み y の計算

以上求めた軸力 X や撓角 φ_1, φ_2 等を, (60) 式並びに (61) 式に代入して, 任意の点の撓みを求める事が出来る。しかるに, 軸力 X は, 複素数として得られたから, 厳密に云えば, 撓み y にも複素数の項を含む事となる。これらの計算は, ある範囲についてはやつて見たが, 更に全般的に計算し, 三角級数による解による計算値, 実験値などとも比較する考えであるから, 今回の研究報告には見合せ, 研究第3報の機会に発表する事とする。

VI. 結　　論

まず第一に, 鋼鉄, 白樫, 孟宗竹各々の梁に対し, 合成理論, 本理論, いずれの理論を用いて計算しても, $h_m=0$, すなわち, 軸力の作用線が中心線と一致する場合は, X は軸張力となり, $h_m=\frac{h}{4}$ すなわち, 中心線より, 下方, 底面との中点に軸力が作用する場合は, X は, 軸圧力となり, 又, $h_m=\frac{h}{2}$ すなわち, 底面に, 軸力が作用する場合もやはり, X は軸圧力となる事が分つた。次に, $h_m=-\frac{h}{4}$ すなわち, 中心線より上方上面との中点に軸力が作用する場合は, X は軸張力となり, $h_m=\frac{h}{2}$ すなわち, 上面に軸力が作用する場合もやはり, X は軸張力となる事が分つた。これを総合すれば, 中心線より下方或位置より中心線まで並びに, 中心線より上方に, 軸力が作用する場合は, 軸張力, 中心線より下方, 或位置より底面に至る間に軸力が作用する場合は, 軸圧力となる事が分る。合成理論によれば, 鋼鉄梁, 白樫梁, 孟宗竹梁のいかんを問わず, 軸圧力, 軸張力, いずれが作用する場合でも, $h_m=\frac{h}{4}$, $h_m=-\frac{h}{4}$ の場合の方が, $h_m=\frac{h}{2}$, $h_m=-\frac{h}{2}$ の場合よりも, X の絶対値が, それぞれ大きくなつているのに反し, 本理論による場合は, さほどの差は認められない。更に, 軸力 X は総て, 実数と虚数の組合せ, すなわち複素数として出ているのは, 極めて意味深いものがある。すなわち軸力 X は, 流線としての力線[3] とそれに直角なる等ポテンシヤル線の如く考える事も出来る。次に, 軸力と荷重の位置との関係について云えば, 本理論による計算値は, 合成理論によるよりも, 荷重の位置によつて生ずる軸力の大さの変化が少ない事が分る。又, 両端の撓角 φ_1, φ_2 について, 計算から次の結論を得る。まず総合的に見て, 本理論による場合は, 合成理論による場合よりも, 鋼鉄梁, 白樫梁, 孟宗竹梁のいかんを問わず, 荷重の位置が支点に近い程, φ_1 と φ_2 との差が大きく出ている。又, 最大撓角は, 材料のいかんを問わず, 本理論の方が合成理論よりも幾分大きくなつていて, $\varepsilon=0.40$ の荷重位置において生ずる事が分る。上記の計算結果による軸力の変化状態から見て, 梁の中心線より下方ある位置より底面に至る間に X が

3) 林　桂一: 数値計算, 1941; H. W. レデイツク & F. H. ミラー: 富久泰明訳, 工業技術者のための応用数学, 1953; 林　桂一: 応用函数方程式, 1952.

作用する場合は，軸圧力となるから，この間においては，軸力0なる場合に比べ，挠みyは，増加するものと考えられる。そこで試みに，軸力の作用する三角級数によつて表示せられる挠み解式を用い，物理実験値より逆に軸力Xを計算して見れば，軸圧力となるので，本理論並びに合成理論によれば，軸力の作用位置は，梁の中心線よりも遙かに底面よりに存在するものと考えられる。但し，これは拘束支点が梁の底部にのみ存在する場合であつて，図~1の点線で示した如く，拘束支点が梁の上面にも存在する場合には，軸力の作用線は，ずつと上方に上り，中心線附近又は，中心線よりもやや上方に存在する事もあり得ると考えられる。斯の如く軸力Xの作用位置は，支点の構造いかんによつて変つて来る事はもちろんであつて，挠みyも，この軸力の作用位置，大さ，記号(+)，(－)等によつて異なつて来る事は云うまでもない。挠みの計算結果は，広範囲に渡つて吟味中であり，梁の軸力作用線の位置に関する持論，更に両支点上に集中荷重が載る場合の挠みの減少率に関する問題などと共に，桁梁の挠み理論に関する基礎的研究(III)の機会に発表する考えである。

(昭和32年4月30日受理)